<u>ΘΕΟΤΟΚΑΤΟΣ</u>
<u>Λόγοι και διαστήματα</u>

α. Η έκφραση των διαστημάτων με κλασματικούς λόγους

Από την αρχαιότητα ήδη, τα διαστήματα ανάμεσα στους μουσικούς φθόγγους εκφράζονταν με μαθηματικούς λόγους, δηλ. με κλάσματα. Αυτός είναι και ο πιο φυσικός τρόπος έκφρασης των διαστημάτων και έχει να κάνει με τον τρόπο που αντιλαμβάνεται τα διαστήματα ο ανθρώπινος νους: όταν λέμε ότι το τάδε μουσικό διάστημα είναι τόνος, ημιτόνιο κλπ., στην ουσία συγκρίνουμε έναν φθόγγο με κάποιον άλλον. Έχουμε επομένως κατά νου μία μεν απόσταση, αλλά δύο φθόγγους. Οι δύο φθόγγοι είναι ο αριθμητής και ο παρονομαστής του κλάσματος, που εκφράζουν τους δύο ήχους που βγαίνουν από μια παλλόμενη χορδή, εάν την πάλουμε κατά δύο διαφορετικούς τρόπους (επομένως το κλάσμα εκφράζει δύο παλμούς) και το διάστημα είναι η μεταξύ τους απόσταση. Γι' αυτό και στη φυσική το διάστημα εκφράζεται ως ο λόγος δύο συχνοτήτων.

Ο τρόπος αυτός ανάγεται στον **Πυθαγόρα**, ο οποίος, σύμφωνα με το Γαυδέντιο[*1], περνώντας έξω από το "χαλκείον" παρατήρησε ότι, άλλα από τα χτυπήματα που έκαναν στο σίδερο οι τεχνίτες είχαν μεταξύ τους κάποια σχέση και προξενούσαν ευχάριστο αίσθημα στην ακοή, ενώ άλλα όχι. Έτσι, βρήκε πειραματικά ότι, αν χτυπούσε με το σφυρί ένα βάρος και μετά το μισό, ο ήχος που ακουγόταν τη δεύτερη φορά ήταν η αντιφωνία της πρώτης, η οποία επομένως έχει λόγο σε ηχητικούς παλμούς 2/1 (το μισό δηλ. του πρώτου βάρους). Αν αυτό το μεταφέρουμε πρακτικά σε μια χορδή (μονόχορδο των αρχαίων), σημαίνει πως αν χτυπήσουμε αρχικά ολόκληρη τη χορδή και μετά τη χωρίσουμε στη μέση και χτυπήσουμε το ένα μέρος (δηλ. το μισό), τότε ο ήχος που θα παραχθεί θα είναι η αντιφωνία του πρώτου (π.χ. ΝΗ-ΝΗ') και θα έχει λόγο σε μήκος χορδής 1/2. Με όποια μορφή επομένως κι αν βάλουμε το κλάσμα, μουσικά αναφερόμαστε στο ίδιο μέγεθος. Απλώς η πρώτη μορφή με μεγαλύτερο τον αριθμητή (2/1) αναφέρεται σε παλμούς ή συχνότητες, ενώ η δεύτερη με μικρότερο τον αριθμητή (1/2) σε μήκος χορδής, το αποτέλεσμα της οποίας μάλιστα μπορεί να υπολογιστεί (π.χ. για το 1/2 είναι 0.5). Έτσι ο Πυθαγόρας, χτυπώντας αρχικά ολόκληρη τη χορδή και μετά το 1/2, τα 2/3 και τα 3/4 της χορδής, υπολόγισε:
-το μέγεθος της διά οκτώ συμφωνίας (διαπασών) 2/1
το οποίο περιλαμβάνει:
-το μέγεθος της διά τεσσάρων συμφωνίας (τετράχορδο ή "συλλαβή") 4/3 και
-το μέγεθος της διά πέντε συμφωνίας (πεντάχορδο ή "διοξεία") 3/2
η διαφορά[*2] των οποίων είναι:
-το μέγεθος της διά δύο συμφωνίας (μείζων τόνος) 9/8

Όπως παρατηρούμε, οι βασικές συμφωνίες της μουσικής διά πασών, διά πέντε και διά τεσσάρων εκφράζονται με τους αριθμούς 1, 2, 3 και 4 (σε μήκος χορδής 1:2, 2:3, 3:4) , οι οποίοι αποτελούν και την περίφημη "τετρακτύ", που, κατά τους πυθαγόρειους, δεν είναι μόνο η βάση των μουσικών συμφωνιών, αλλά εφαρμόζεται γενικώς στη φύση. Οι λόγοι αυτοί, με διαφορά μιας μονάδας μεταξύ αριθμητή και παρονομαστή, ονομάζονται **επιμόριοι** (9/8=επόγδοος, 4/3=επίτριτος κλπ., όμως 3/2=ημιόλιος, δηλ. το όλο=2 συν το μισό του=2+1) ενώ οι υπόλοιποι **επιμερείς** (ο αριθμητής αποτελείται από τον παρονομαστή + ένα μέρος του μεγαλύτερο της μονάδας). Ευρεία χρήση των επιμορίων λόγων έκανε ο Πτολεμαίος, γι' αυτό και ονομάζονται και **πτολεμαϊκοί**,

ενώ αυτοί είναι και οι λόγοι που, κατά την επιστήμη της φυσικής, δεν δημιουργούν διακροτήματα και αποτελούν και τα σύμφωνα διαστήματα (τετράχορδο, πεντάχορδο, διαπασών) της αρχαίας ελληνικής μουσικής (4/3, 3/2, 2/1).

Στη συνέχεια ο Πυθαγόρας βρήκε ότι η κλίμακα (η έκταση δηλ. της διαπασών συμφωνίας 2/1) αποτελείται από 5 μείζονες τόνους και δύο "λείμματα". Η πιο παραστατική εικόνα που έχουμε γι' αυτό είναι το πιάνο: οι τόνοι είναι οι ΝΤΟ-ΡΕ, ΡΕ-ΜΙ, ΦΑ-ΣΟΛ, ΣΟΛ-ΛΑ και ΛΑ-ΣΙ και τα λείμματα ΜΙ-ΦΑ και ΣΙ-ΝΤΟ. Λέμε λείμματα και όχι ημιτόνια, γιατί αν θέσουμε ημιτόνια, με την έννοια του μισού των τμημάτων που εκλαμβάνουμε ως μείζονα τόνο, η κλίμακα επιστημονικά δεν αντιφωνεί. Άλλωστε ο τόνος 9/8 δεν διαιρείται στη μέση, γιατί δεν υπάρχει ρητός αριθμός που αν τον υψώσουμε στο τετράγωνο να μας δίνει 9/8, να είναι δηλ. τετραγωνική ρίζα του. Τα δύο λοιπόν διαστήματα που υπολείπονταν για να αντιφωνήσει η κλίμακα (ΜΙ-ΦΑ και ΣΙ-ΝΤΟ) ονομάστηκαν λείμματα και έχουν λόγο 256/243. Ο δε μείζων τόνος (204 cents στη διεθνή μουσικολογική κλίμακα των 1200 τμημάτων) αποτελείται:
- όχι από 2 ημιτόνια, αφού δεν χωρίζεται στη μέση, ενώ το διάστημα κοντά στα 102 cents του ημιτονίου δεν αποτελεί διάστημα της κλίμακας, γιατί αν τεθεί σ' αυτήν, η κλίμακα θα πλεονάζει σε τμήματα[*3],
- ούτε από 2 λείμματα, αφού αυτά ισούνται με 90 cents έκαστο και είναι μικρότερα του ημιτονίου,
- αλλά από ένα λείμμα και το υπολειπόμενο διάστημα έως τον τόνο, το οποίο ονομάζεται αποτομή και προκύπτει αν αφαιρέσουμε το λείμμα από τον τόνο, δηλ. αν διαιρέσουμε τους αντίστοιχους λόγους.

Επομένως η αποτομή έχει λόγο 9/8 : 256/243 = 2187/2048 (ή 204 – 90 = 114 cents), ενώ η διαφορά λείμματος – αποτομής 256/243 : 2187/2048 μας δίνει το πυθαγόρειο κόμμα, που ισούται με 23 cents ή με 1.4 τμήματα της κλίμακας των 72 τμημάτων, που χρησιμοποιούμε σήμερα.

*[*1]Γαυδεντίου. Αρμονική Εισαγωγή, 11 στο Musici Scriptores Graeci (Λειψία 1895)*
*[*2]Όταν κάνουμε λόγο για "διαφορά" διαστημάτων εννοούμε διαίρεση λόγων και όταν κάνουμε λόγο για "πρόσθεση" διαστημάτων εννοούμε πολλαπλασιασμό λόγων. Επομένως 3/2 : 4/3 = 9/8.*
*[*3]5 τόνοι + 2 λείμματα = 1200 cents, εάν όμως εκλάβουμε το λείμμα ως ημιτόνιο των 102 cents, (5 x 204) + (2 x 102) = 1224 cents, ενώ η κλίμακα περιέχει 1200 cents. Το ημιτόνιο μπορεί να εκληφθεί στη μέση όχι του πυθαγόρειου τόνου (που είναι και ο σωστός τονικά στα 204 cents) αλλά του δυτικού συγκερασμένου τόνου των 200 cents, οπότε (5 x 200) + (2 x 100) = 1200 cents. Με τη σύμβαση αυτή (να πάρουμε δηλ. ως τόνο όχι τον πρωτότυπο αλλά τον συγκερασμένο) καθίσταται δυνατή η εναρμόνιση της μουσικής κατά το δυτικό σύστημα, κάτι τέτοιο όμως είναι αδόκιμο για φωνητική μουσική, όπως η βυζαντινή, που εκφράζεται με τα διαστήματα από νόμους της φυσικής, έτσι όπως τους ανακάλυψε αρχικά ο Πυθαγόρας. Χρησιμοποιείται όμως η σύμβαση αυτή στην έκφραση των φυσικών διαστημάτων με μόρια επί κλίμακος, καθώς οι*

διαφορές από την ασυγκέραστη κλίμακα είναι επουσιώδεις, όπως παρατήρησε και η Πατριαρχική Επιτροπή του 1883 (βλ. και παρακάτω).

β. Η έκφραση των λόγων των διαστημάτων με μόρια επί κλίμακος (συγκερασμός)

Όπως είπαμε, τα μουσικά διαστήματα είναι στην ουσία η σύγκριση ενός φθόγγου με κάποιον άλλο, ο λόγος δηλ. του ενός προς τον άλλο. Το ανθρώπινο αυτί μπορεί μεν ν' ακούει με μαθηματικούς λόγους, αντιλαμβάνεται όμως την απόσταση μεταξύ των φθόγγων με γεωμετρικά μεγέθη. Αν πούμε π.χ. σε κάποιον ότι ο μείζων τόνος είναι 9/8, δεν θα καταλάβει και πολλά πράγματα. Αν όμως πούμε ότι είναι 12 μόρια από τα 72 της κλίμακας, αμέσως θα αντιληφθεί περί τίνος πρόκειται. Έτσι, από ένα σημείο και έπειτα κρίθηκε σκόπιμο να μην εκφράζονται τα μουσικά διαστήματα μόνο με λόγους, αλλά και με τμήματα (μόρια) μιας ορισμένης κλίμακας. Η ακρίβεια όμως της αντιστοίχησης λόγου/μορίων εξαρτάται από τα τμήματα που θα ορίσουμε για την κλίμακά μας. Παλαιότερα δοκιμάζονταν διάφορες μέθοδοι για την αντιστοίχηση, με τις οποίες αρχικώς δεν θ' ασχοληθούμε. Κι αυτό γιατί σήμερα, μετά την εισαγωγή των λογαρίθμων στα μαθηματικά, υπάρχει συγκεκριμένος μαθηματικός τύπος γι' αυτό, ο οποίος εφαρμόζει το συγκερασμό με ακρίβεια στα τμήματα της κλίμακας που θα ορίσουμε. Έτσι, αν απλώς περάσουμε τον τύπο αυτό ως συνάρτηση σε ένα λογιστικό φύλλο εργασίας στον υπολογιστή (excel, open office calc, gnumeric κ.ά.), ορίζοντας και τα τμήματα της κλίμακας που επιθυμούμε, και τον εφαρμόσουμε σε κάποιο λόγο (κλάσμα), το πρόγραμμα θα μας μετατρέψει αυτομάτως το λόγο σε μόρια επί κλίμακος. Ο τύπος αυτός είναι:

(μόρια κλίμακας) x LOG(λόγος) με βάση το 2

Ο λόγος του μείζονος τόνου 9/8 λ.χ., εάν τον εφαρμόσουμε σε κλίμακες με 72, 68, 53 και 1200 τμήματα, μας δίνει αντιστοίχως:

-72 x LOG (9/8)2 = 12,23
-68 x LOG (9/8)2 = 11,55
-53 x LOG (9/8)2 = 9,01
-1200 x LOG (9/8)2 = 203,91

Έτσι λέμε ότι ο λόγος 9/8 ισούται περίπου με:

-12 τμήματα σε κλίμακα 72 τμημάτων
-12 τμήματα σε κλίμακα 68 τμημάτων
-9 τμήματα σε κλίμακα 53 τμημάτων
-204 τμήματα σε κλίμακα 1200 τμημάτων

Βλέπουμε λοιπόν ότι τα τμήματα αυτά (π.χ. 12 μόρια για τον τόνο που γνωρίζουμε σήμερα) δεν ισούνται ακριβώς με το λόγο από τον οποίο προήλθαν, αλλά περίπου. Αυτό σημαίνει ότι:

- **η <u>απολύτως ακριβής</u> θεωρητική αποτύπωση** των διαστημάτων απαιτεί την έκφρασή τους μόνο με κλασματικούς **ΛΟΓΟΥΣ** (διαστήματα ασυγκέραστα). Όμως
- προκειμένου τα διαστήματα να γίνουν καλύτερα αντιληπτά από τους μουσικούς έχει προκριθεί **η <u>κατά προσέγγιση</u> θεωρητική αποτύπωση**, που γίνεται σε **ΜΟΡΙΑ** επί κλίμακος (διαστήματα συγκερασμένα). Ωστόσο μπορεί κανείς να συνδυάσει τις δύο αυτές μεθόδους και έτσι
- **η <u>σχετικά ακριβής</u> θεωρητική αποτύπωση** των διαστημάτων γίνεται με **ΔΕΚΑΔΙΚΟΥΣ αριθμούς μορίων** επί κλίμακος, όπου αυτό απαιτείται. Οι δεκαδικοί αριθμοί μπορεί να δίνονται είτε στην κανονική τους μορφή (οπότε όσο περισσότερα τα δεδαδικά ψηφία τόσο περισσότερη και η ακρίβεια) είτε -θυσιάζοντας λίγο την

ακρίβεια, κερδίζοντας όμως σε χρηστικότητα- με υποδιαίρεση του ακεραίου στο μισό του μορίου (.50) ή, το πολύ, σε τέταρτα (.25 ή .75), επομένως με χρήση μέχρι δύο δεκαδικών ψηφίων.

Η τρίτη αυτή μέθοδος αποτύπωσης είναι ευνόητο ότι δεν μπορεί να χρησιμοποιείται συστηματικά, αλλά σε περιορισμένες περιπτώσεις:
α) είτε ως *βοηθητικό* μέγεθος αποτύπωσης, παράλληλα με την πρωτεύουσα κατά προσέγγιση αποτύπωση σε ακεραίους αριθμούς, για να διευκρινήσει καλύτερα, όπου αυτό απαιτείται, τα ούτως ή άλλως λανθάνοντα συγκερασμένα διαστήματα. Για παράδειγμα, μπορούμε να πούμε, για λόγους σχετικής ακρίβειας, ότι ο μείζων τόνος λ.χ. δεν είναι 12/72 αλλά περίπου 12.25/72 ή ότι το λείμμα είναι 5.5/72, πέφτοντας έξω ελάχιστα από τα πραγματικά μεγέθη 12.23/72 και 5.4/72 αντίστοιχα
β) είτε ως *βασικό* μέγεθος αποτύπωσης σε εξαιρετικές περιπτώσεις, όπου τουλάχιστον δύο διαστήματα του τετραχόρδου βρίσκονται κοντά στο μισό του ακεραίου, με αποτέλεσμα να υπάρχουν πολλαπλές και συγκρουόμενες επιλογές στην έκφραση με ακέραιους αριθμούς, που απαγορεύουν τη χρήση τους. Για παράδειγμα, ορίζοντας ο Αριστόξενος τα μικρά διαστήματα του λεγόμενου ημιόλιου χρωματικού γένους στα 3/8 του τόνου, είμαστε υποχρεωμένοι να τα συμβολίσουμε με τον αριθμό 4.5 (με τόνο στα 12 μόρια, αφού 12 : 8 = 1.5 και 1.5 x 3 = 4.5) και όχι στα 4 ούτε στα 5, γιατί αν, από τη μια, τα συγκεράσουμε στον αριθμό 4 πέφτουμε στην περίπτωση του μαλακού χρωματικού γένους, που έχει διαστήματα στο 1/3 του τόνου ακριβώς (δηλ. 4), ενώ αν τα συγκεράσουμε στα 5, το τετράχορδο θα πλεονάζει (βλ. και παρακάτω, στα διαστήματα του Αριστόξενου).

Επομένως, όταν μιλάμε για κατά προσέγγιση αποτύπωση των λόγων σε τμήματα επί κλίμακος, κάνουμε λόγο για ακέραιους αριθμούς και όχι δεκαδικούς. Για το λόγο αυτό συμβολίζουμε τον τόνο με 12 μόρια και όχι με το ακριβέστερο 12.23. Οι δεκαδικοί αριθμοί δεν εξυπηρετούν το σκοπό του συγκερασμού, δηλ. την καλύτερη αντίληψη των διαστημάτων από τους μουσικούς: ο μουσικός έχει κατά νου αρχικά τα τμήματα της κλίμακας στην οποία δουλεύει (53, 68, 72 κλπ.) και πάνω σ' αυτά αντιλαμβάνεται τα μεγέθη των διαστημάτων με ακέραιους πάντα αριθμούς (λέει π.χ. ότι ο μείζων τόνος είναι 12/72 ή 12/68 ή 9/53, ότι ο ελάσσων τόνος είναι 10/72 ή 9/68 ή 7/53 ή ότι ο ελάχιστος τόνος είναι 8/72 ή 7/68 ή 6/53). Η έκφραση συγκερασμού με δεκαδικούς αριθμούς, και μάλιστα σε συνδυασμό με κοντινούς ακεραίους (π.χ. 6/72 και 6.5/72, 7.5/72 και 8/72 κλπ.) απαιτεί από το μουσικό μια επιπλέον κλασματική υποδιαίρεση των τμημάτων της κλίμακας, εκτός από την ακέραια, η οποία όμως δεν είναι δυνατή στην πράξη, αφού και το πλέον εξασκημένο αυτί δεν αντιλαμβάνεται <u>κατά την εκτέλεση του μέλους</u> τη διαφορά των δεκαδικών μεγεθών με τα κοντινότερα ακέραια, που του είναι οικεία, ενώ έτσι δεν εξυπηρετείται και ο σκοπός του συγκερασμού, που είναι η κατά προσέγγιση αποτύπωση των διαστημάτων προκειμένου αυτά να γίνουν καλύτερα αντιληπτά από τους μουσικούς. Αν φύγουμε από το σκοπό αυτό, θα πάμε στην ακριβή αποτύπωση, η οποία όμως είναι δυνατή μόνο με λόγους, όπως είπαμε και η οποία δεν έχει το πλεονέκτημα της εύκολης αντίληψης των διαστημάτων από τους μουσικούς εκτελεστές.

Η δεκαδική αποτύπωση μορίων ωστόσο εξυπηρετεί, όπως είδαμε, την ανάγκη ακριβέστερου προσδιορισμού με τμήματα επί κλίμακος των λόγων ενός διαστήματος και αυτό δεν αποκλείεται να γίνει σε κάποιες περιπτώσεις, <u>συνήθως παράλληλα με την πρωτεύουσα κατά προσέγγιση ακέραια αποτύπωση</u>, για λόγους έρευνας ή διευκρίνησης διαστημάτων, όπου κάτι τέτοιο επιβάλλεται και μάλιστα με χρήση

τουλάχιστον δύο δεκαδικών ψηφίων, για μεγαλύτερη ακρίβεια (έγινε και στην παρούσα μελέτη). Η συστηματική όμως χρήση δεκαδικών αριθμών ως βασικών (και όχι κατ' εξαίρεση ή διευκρινιστικών) διαστημάτων στη μουσική πράξη, απλώς ομολογεί το ανεπαρκές των μορίων της κλίμακας, προκειμένου να εκφράσει κάποιο διαστηματικό μέγεθος με ακέραιο αριθμό, αντιληπτό από όλους. Αν όμως η κλίμακα είναι ανεπαρκής, απλώς επιλέγουμε κάποια άλλη, που το εκφράζει καλύτερα. Προκύπτει λοιπόν αναγκαίως το θέμα της σύγκρισης των συγκερασμένων κλιμάκων:

γ. Σύγκριση κλιμάκων συγκερασμού

Από την εφαρμογή του λογαριθμικού τύπου μπορούν να εξαχθούν πολύτιμα συμπεράσματα, τόσο για το κατά πόσο ήταν σωστός ο συγκερασμός των λόγων που έκαναν οι θεωρητικοί προηγουμένων αιώνων, χωρίς τη χρήση λογαρίθμων, όσο και για το βαθμό επιτυχίας που έχει η χρήση μιας συγκεκριμένης κλίμακα στο συγκερασμό. Μιλώντας δηλ. για 12 τμήματα επί κλίμακος 72, πέφτουμε έξω κατά 0.23, όπως φαίνεται πιο πάνω (αφού η εφαρμογή του λογαριθμικού τύπου στο λόγο 9/8, για την κλίμακα των 72 τμημάτων, μάς δίνει μείζονα τόνο 12.23, ο οποίος στρογγυλοποιείται στο 12 με σφάλμα 0.23). Αντίστοιχα τα ποσοστά σφάλματος είναι 0.55 για την κλίμακα των 68 τμημάτων, 0.01 για την κλίμακα των 53 και 0.91 για την κλίμακα των 1200 Προσοχή: τα ποσοστά σφάλματος είναι επί των μορίων της κλίμακος που χρησιμοποιείται. Και επειδή, αν τα ποσοστά τα ανάγουμε σε απόλυτους αριθμούς, προκύπτουν τα εξής:

$$0.23/72 = 0.0032$$
$$0.55/68 = 0.0080$$
$$0.01/53 = 0.0002$$
$$0.91/1200 = 0.0007$$

εύκολα συνάγεται το συμπέρασμα ότι ο καλύτερος συγκερασμός του μείζονος τόνος πετυχαίνεται με χρήση κλίμακας 53 τμημάτων, που πέφτει έξω στη διατύπωση του επογδόου τόνου 9/8 μόλις κατά 0.0002. Είναι γεγονός ότι η κλίμακα αυτή είναι ιδιαίτερα επιτυχής, καθώς καταφέρνει και να περιέχει λίγα τμήματα, οπότε να γίνεται εύκολα αντιληπτή από τους μουσικούς, αλλά και να έχει τα μικρότερα ποσοστά σφάλματος από τις υπόλοιπες μικρές κλίμακες που καταγράψαμε (66, 68 και 72 τμημάτων), επιτυγχάνοντας μάλιστα μέχρι και 100% ακρίβεια σε ορισμένα διαστήματα (χωρίς δηλ. καθόλου σφάλμα), ενώ εκφράζει και το ανέφικτο της διαίρεσης του τόνου 9/8 σε δύο ίσα μέρη, μια και εκφράζει το μείζονα τόνο σε 9 τμήματα με 4 το λείμμα και 5 την αποτομή. Όμως έχει επικρατήσει παγκοσμίως η χρήση της κλίμακας των 1200 τμημάτων (cents) για την περιγραφή των διαστημάτων της μουσικής κάθε λαού, η οποία μπορεί μεν να μην προσφέρεται για εφαρμογή πάνω σε έγχορδο όργανο, μια και είναι πρακτικώς αδύνατο να χωρίσουμε σε 1200 τμήματα ένα μπράτσο οργάνου, όμως, λόγω των υπερβολικά πολλών τμημάτων, λογικά έχει το μικρότερο μέγεθος σφάλματος στη στρογγυλοποίηση ενός τμήματος κι έτσι η περιγραφή των διαστημάτων γίνεται με μεγάλη ακρίβεια, αφού:

$$1/53 = 0.0188$$
$$1/68 = 0.0147$$
$$1/72 = 0.0138$$
$$1/1200 = 0.0008$$

Έτσι, αν π.χ. πούμε 203 αντί 204 cents, η διαφορά είναι απειροελάχιστη. Όμως αν πούμε 11 αντί 12 μόρια στην κλίμακα των 68 ή των 72, ή 8 αντί 9 μόρια στην κλίμακα των 53, η διαφορά είναι πολύ μεγαλύτερη. Ενώ λοιπόν δεν μας ενδιαφέρει και πολύ αν πέσουμε 1 cent έξω, μας ενδιαφέρει όμως αν πέσουμε 1 μόριο, το οποίο

στην κλίμακα των 72 ισούται με 17 cents.

Με τη χρήση επίσης της κλίμακας των cents γίνεται καλύτερα αντιληπτή και η έννοια του λείμματος: αφού ο τόνος 9/8 είναι 204 cents, τότε 5 τόνοι = 1020 cents και, προκειμένου να αντιφωνήσει η κλίμακα στα 1200 απομένουν 1200 – 1020 = 180 cents, που χωρίζονται σε δύο λείμματα των 90 και όχι σε ημιτόνια (δηλ. 204:2 = 102, κι αυτό στο περίπου, γιατί, όπως είπαμε, ο λόγος 9/8 είναι ΠΕΡΙΠΟΥ 204 cents και το κλάσμα αυτό δεν διαιρείται ακριβώς στα δύο). Κι αυτό γιατί με τη χρήση ημιτονίων των 102 περίπου cents θα υπάρχει πλεονασμός, δηλ. πρακτικά η κλίμακα θα είναι φάλτσα, αφού θα βγαίνει πάνω από 1200 cents. Στο πιάνο, για λόγους πρακτικούς, ο τόνος έχει στρογγυλοποιηθεί στα 200 cents και το λείμμα έχει γίνει πλέον ακριβώς ημιτόνιο στα 100 cents. Αυτή η σύμβαση όμως δεν οδηγεί σε μαθηματικώς σωστά διαστήματα, αφού ο τόνος δεν είναι ο φυσικός 9/8, ομοίως ούτε το δίτονο (81/64, δηλ. 9/8 x 2), ενώ οι θεμελιώδεις συμφωνίες διά τεσσάρων και διά πέντε (ΝΗ-ΓΑ/ΠΑ-ΔΙ, ΝΗ-ΔΙ/ΠΑ-ΚΕ κλπ.) ούτε κι αυτές είναι στη φυσική τους θέση, με αποτέλεσμα η κλίμακα να είναι επιστημονικώς "φάλτσα", αφού κατά την εφαρμογή των συμφωνιών παράγονται διακροτήματα, σύμφωνα με τη φυσική επιστήμη. Όμως τελικά οι διαφορές από τη σωστή φυσική κλίμακα είναι ακουστικώς αμελητέες για τη δυτική μουσική, που δεν έχει διαστήματα μικρότερα του ημιτονίου ούτε διαστήματα μεταξύ τόνου και ημιτονίου, ενώ, παράλληλα, με τη σύμβαση αυτή είναι εύκολο να παιχθεί οποιαδήποτε μελωδία από οποιαδήποτε βάση. Στη φωνή όμως (άρα και στη βυζαντινή μουσική, που είναι καθαρώς φωνητική), καθώς και στα άταστα έγχορδα όργανα, δεν υπάρχει λόγος να γίνει τέτοια σύμβαση και ως φυσικός τόνος νοείται πάντα ο επόγδοος πυθαγόρειος τόνος (9/8).

δ. Συμπερασματικά: λόγοι – μόρια – συγκερασμός

Από τα παραπάνω καθίσταται προφανές ότι:

α) Τα μόρια που χρησιμοποιούμε σήμερα για την περιγραφή των διαστημάτων είναι στρογγυλοποίηση των λόγων σε ακέραιους αριθμούς (συγκερασμός), που εκφράζουν τμήματα επί κλίμακος. Επομένως **τα συγκερασμένα τμήματα που γνωρίζουμε σήμερα μπορεί να αποτελούν στρογγυλοποίηση περισσοτέρων του ενός λόγων**:
λ.χ. ο γνωστός μας ελάσσων τόνος 10/72 μπορεί να είναι συγκερασμός/στρογγυλοποίηση των λόγων 800/729 (9.65), 11/10 (9.90), 208/189 (9.95), 54/49 (10.09), 21/19 (10.40) αλλά και άλλων. Αν λοιπόν ενδιαφερόμαστε για ακριβέστερη έκφραση των λόγων, αυτή θα πρέπει να γίνει σε ασυγκέραστα μεγέθη, δηλ. με αριθμούς τουλάχιστον δύο δεκαδικών ψηφίων.

β) Ο συγκερασμός άλλοτε είναι επιτυχής και άλλοτε όχι. Αυτό εξαρτάται από το ποσοστό σφάλματος του συγκερασμού, το οποίο με τη σειρά του έχει να κάνει με την κλίμακα που θα επιλέξουμε να χρησιμοποιήσουμε για το συγκερασμό:
- όσο περισσότερο ο λόγος του διαστήματος στρογγυλοποιείται κοντά σε ακέραιο αριθμό (π.χ. 9.01/53), τόσο επιτυχέστερος είναι ο συγκερασμός, αφού τα τμήματα επί κλίμακος εκφράζονται πάντα με καθαρό ακέραιο, προκειμένου να γίνουν κατανοητά και η επιλογή του ακεραίου (π.χ. 9/53) σημαίνει μικρό σφάλμα.
- όσο περισσότερο ο λόγος του διαστήματος απέχει από τον κοντινότερο ακέραιο, όσο δηλ. πιο κοντά είναι στο + 0.5 του αριθμού (π.χ. 11.55/68), τόσο πιο προβληματικός είναι ο συγκερασμός, αφού η επιλογή του ακεραίου (π.χ. 12/68) σημαίνει μεγαλύτερο σφάλμα.

Άρα όσο περισσότερα ασυγκέραστα μεγέθη βλέπουμε κοντά στο μισό του ακεραίου, τόσο πιο ακατάλληλη είναι η κλίμακα. Και αντίστροφα: όσο περισσότερα ασυγκέραστα μεγέθη βλέπουμε κοντά σε ακέραιο, τόσο καταλληλότερη είναι η κλίμακα, καθώς εκφράζει τους λόγους με μεγαλύτερη ακρίβεια.

γ) Κλίμακα με περισσότερα τμήματα δεν σημαίνει αναγκαστικά και καλύτερος συγκερασμός, αφού η επιλογή των ακεραίων αριθμών, προκειμένου να εκφραστούν οι αντίστοιχοι λόγοι, μπορεί να έχει μεγαλύτερο ποσοστό σφάλματος απ' ότι στην κλίμακα με λιγότερα τμήματα (όπως λ.χ. ο τόνος 12/72, που έχει μεγαλύτερο σφάλμα από τον τόνο 9/53).

δ) Κλίμακα με υπερβολικά πολλά τμήματα (όπως αυτή των 1200 cents) έχει το πλεονέκτημα ότι δεν μας ενδιαφέρει το προβληματικό του συγκερασμού στον πλησιέστερο ακέραιο, λόγω της απειροελάχιστης διαφοράς των δύο γειτονικών ακεραίων (π.χ. 203 ή 204 cents είναι μηδαμινή διαφορά, ενώ 11 ή 12 μόρια επί κλίμακος 68 ή 72 είναι αρκετά μεγάλη διαφορά).